УДК 512.548

Р. Ф. Коваль (Вінниц. пед. ун-т)

КЛАСИФІКАЦІЯ КВАДРАТИЧНИХ ПАРАСТРОФНО НЕСКОРОТНИХ ФУНКЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ВІД П'ЯТИ ПРЕДМЕТНИХ ЗМІННИХ НА КВАЗІГРУПАХ

The study of quadratic functional equations over quasigroup operations is continued. It is proved that every parastrophically irreducible quadratic functional equation of five objective variables is parastrophically equivalent to one of four given functional equations.

Продовжується вивчення квадратичних функційних рівнянь над квазігруповими операціями. Доведено, що кожне парастрофно нескоротне квадратичне функційне рівняння від п'яти предметних змінних парастрофно рівносильне одному з чотирьох наведених функційних рівнянь.

Дана стаття є продовженням праці [1], в якій доведено, що кожне загальне парастрофно нескоротне квадратичне функційне рівняння від трьох предметних змінних є парастрофно рівносильним функційному рівнянню асоціативності, а від чотирьох предметних змінних — точно одному з рівнянь: медіальності або псевдомедіальності.

У цій статті встановлюється, що кожне таке рівняння від п'яти змінних парастрофно рівносильне одному з чотирьох наведених рівнянь.

Нагадаємо деякі необхідні позначення, теореми та означення. Більш детальну інформацію можна знайти в [1].

Розглянемо слова мови другого порядку, до запису яких входять предметні x_0, $x_1, \ldots$ та функційні F_0, $F_1, \ldots$ змінні. Ці слова позначатимемо $\omega, v, \ldots$. Довжиною слова ω називають кількість появ предметних символів у даному слові і позначають $|\omega|$.

Означення 1. *Дві рівності слів другого порядку назвемо парастрофно рівносильними, якщо одну з іншої можна отримати за скінченну кількість застосувань таких парастрофних перетворень*:

1) *переіменування предметних або функційних змінних*;

2) *перетворення за комутуванням*: *заміна підслова виду* $\omega \cdot v$ *словом* $v \odot \omega$;

3) *перетворення за зовнішнім діленням*: *перехід від рівності виду* $\omega_1 \cdot \omega_2 = v_1 \circ v_2$ *до однієї з рівностей*

$$\omega_1 \backslash (v_1 \circ v_2) = \omega_2 \quad \textit{або} \quad (v_1 \circ v_2) / \omega_2 = \omega_1,$$

де $/, \backslash$ *є відповідно лівим та правим діленням операції* $(\cdot)$;

4) *перетворення за внутрішнім* (*правим*) *діленням через змінну* x: *заміна підслова* $x \cdot \omega$ *на* x *і одночасно заміна всіх інших появ змінної* x *словом* $x \backslash \omega$, *якщо* x *не має появи в слові* ω.

Означення 2. *Дві рівності слів другого порядку назвемо комутативно рівносильними, якщо одне з іншого можна отримати за скінченну кількість застосувань перетворень* 1) *і* 2) *із означення парастрофної рівносильності.*

Функційне рівняння $v = \omega$ називають: *загальним*, якщо функційні змінні, що входять до його запису, є попарно різними; *врівноваженим*, якщо кожна предметна змінна має точно по одній появі в лівій і правій частинах рівняння; *квадратичним*, якщо кожна предметна змінна має в рівнянні точно дві появи; *скоротним*, якщо воно має пару підслів, які містять всі появи в рівнянні всіх змінних, що входять до їх запису; *парастрофно скоротним*, якщо воно парастрофно рівносильне деякому скоротному рівнянню.

Лема 1 [1]. *Якщо предметна змінна x має точно дві появи у функційному рівнянні $v = \omega$, то це рівняння парастрофно рівносильне рівнянню типу*[1]

$$x = x v_1 v_2 \ldots v_n \tag{1}$$

для деяких підслів $v_1, v_2, \ldots, v_n$ цього рівняння.

З леми 1 випливає, що (1) можна вважати деяким канонічним виглядом функційних рівнянь, які мають точно дві появи змінної x. При цьому послідовність підслів $v_1, v_2, \ldots, v_n$ назвемо *окантуванням* змінної x у рівнянні $v = \omega$.

Лема 2 [1]. *Циклічна перестановка окантування змінної x також є окантуванням цієї змінної в деякому функційному рівнянні, яке парастрофно рівносильне даному.*

Лема 2, зокрема, означає, що окантування слід уявляти як послідовність, яка розташована не на прямій, а на колі. Підпослідовність $v_i, v_{i\oplus 1}, \ldots, v_{i\oplus j}$, де $\oplus$ є додаванням за модулем n, назвемо *дугою окантування*. Якщо дуга містить всі появи в рівнянні всіх своїх змінних, то називатимемо її *самодостатньою*. З леми 2 випливає таке твердження.

Лема 3 [1]. *Якщо деяка змінна рівняння $\omega = v$ має самодостатню окантовну дугу, то це рівняння є парастрофно скоротним.*

Розглянемо парастрофно нескоротні квадратичні функційні рівняння, предметні змінні яких позначатимемо через $x, y, z, u, t, \ldots$ і вважатимемо, що $x \prec \prec y \prec z \prec u \prec t \prec \ldots$.

Лема 4 [1]. *Якщо квадратичне функційне рівняння не має квадратів і самодостатніх дуг, то воно парастрофно рівносильне функційному рівнянню, яке задовольняє такі властивості*:

1) *для довільного підслова $t_1 t_2$*[2] *існує взаємне перейменування змінних t_1 і t_2 та їх перестановка такі, що $t_1 \prec t_2$, а також інші появи цих змінних розташовані так, що t_1 знаходиться лівіше за t_2*;

2) *множини двох підслів довжини два мають не більше однієї спільної змінної*;

3) *множина предметних змінних довільного підслова довжини три є триелементною.*

Теорема 1 [1]. *Кожне загальне парастрофно нескоротне квадратичне функційне рівняння від трьох* (*чотирьох*) *предметних змінних є парастрофно рівносильним функційному рівнянню асоціативності* (*або медіальності, або псевдомедіальності*).

Основним результатом даної роботи є така теорема.

Теорема 2. *Кожне квадратичне парастрофно нескоротне функційне рівняння від п'яти предметних змінних парастрофно рівносильне принаймні одному із чотирьох функційних рівнянь*

$$F_1(F_2(F_3(x, y), F_4(z, t)), u) = F_5(F_6(F_7(x, z), u), F_8(y, t)), \tag{2}$$

$$F_1(F_2(F_3(x, y), F_4(z, t)), u) = F_5(F_6(F_7(x, u), z), F_8(y, t)), \tag{3}$$

$$F_1(F_2(F_3(x, y), F_4(z, t)), u) = F_5(F_6(F_7(x, z), t), F_8(y, u)), \tag{4}$$

$$F_1(F_2(F_3(x, y), F_4(z, t)), u) = F_5(F_6(F_7(x, z), F_8(y, u)), t). \tag{5}$$

Як і в [1], у записі функційних рівнянь функційні змінні позначатимемо символом $(\cdot)$, вважаючи, що різні появи цього символу позначають різні функційні змінні. Таке позначення є допустимим, оскільки розглядаються лише

---

[1] Опущені дужки означають їх ліве розташування, тобто $x v_1 v_2 \ldots v_n$ позначає $(\ldots((x v_1) v_2) \ldots) v_n$.

[2] Тут і далі $t_1, t_2, \ldots$ позначають метазмінні, які набувають значень у множині предметних змінних $\{x, y, z, u, t\}$.

загальні рівняння, тобто такі, в яких всі функційні змінні є різними. Крім того, для зменшення кількості дужок функційний символ $(\cdot)$ будемо опускати в певних місцях. Отже, за цією домовленістю, функційні рівняння (2) – (5) можна подати відповідно у вигляді

$$(xy\cdot zt)u = (xz\cdot u)\cdot yt, \tag{6}$$

$$(xy\cdot zt)u = (xu\cdot z)\cdot yt, \tag{7}$$

$$(xy\cdot zt)u = (xz\cdot t)\cdot yu, \tag{8}$$

$$(xy\cdot zt)u = (xz\cdot yu)\cdot t. \tag{9}$$

Довжина рівняння — це сума довжин слів лівої і правої частин. Оскільки ми розглядатимемо рівняння, які мають п'ять предметних змінних і кожна змінна має точно дві появи, то таке функційне рівняння має довжину 10. Проте в лівій і правій частинах рівняння можуть бути слова різної довжини. Тому маємо п'ять типів функційних рівнянь:

$$5 = 5, \quad 6 = 4, \quad 7 = 3, \quad 8 = 2, \quad 9 = 1,$$

де $m = n$ означає, що мова йде про рівняння $\omega = v$, в якому $m := |\omega|$ і $n := |v|$.

Лема 5. *Кожне квадратичне парастрофно нескоротне функційне рівняння від п'яти предметних змінних парастрофно рівносильне квадратичному рівнянню типу* $5 = 5$.

Доведення. Довільне функційне рівняння $\omega_0\omega_1 = \omega$ типу $m + n = k$, де $m := |\omega_0|$, $n := |\omega_1|$, $k := |\omega|$, парастрофно рівносильне функційному рівнянню типу $m = n + k$. Для цього досить поділити рівняння зовні на ω_1 і отримаємо потрібне рівняння $\omega_0 = \omega\omega_1$.

Саме тому кожне з рівнянь типів $9 = 1$, $8 = 2$, $7 = 3$ парастрофно рівносильне функційному рівнянню типу $5 = 5$ чи $6 = 4$. Справді, функційні рівняння типу $9 = 1$ можна поділити за довжиною підслів на такі підтипи:

$$5 + 4 = 1, \quad 6 + 3 = 1, \quad 7 + 2 = 1, \quad 8 + 1 = 1,$$

які зовнішнім діленням зводяться до функційних рівнянь типів $5 = 5$, $6 = 4$, $7 = 3$ та $8 = 2$ відповідно. Аналогічно отримуємо, що рівняння типу $8 = 2$ парастрофно рівносильні функційним рівнянням перших трьох типів, а саме: $5 = 5$ або $6 = 4$, або $7 = 3$; а рівняння типу $7 = 3$ парастрофно рівносильні функційним рівнянням типу $5 = 5$ або $6 = 4$.

Функційні рівняння типу $6 = 4$ можна поділити за довжиною підслів на три підтипи: $5 + 1 = 4$, $4 + 2 = 4$, $3 + 3 = 4$. Функційні рівняння підтипу $5 + 1 = 4$ також зовнішнім діленням зводяться до функційних рівнянь типу $5 = 5$.

У рівнянні підтипу $4 + 2 = 4$ двоелементне підслово має різні предметні змінні, бо інакше рівняння буде скоротним. Позначимо їх через x, y:

$$\omega_0\cdot xy = \omega.$$

Якщо друга поява змінної x лежить в слові ω, то поділимо це рівняння на y через x і отримаємо рівняння

$$\omega_0\cdot x = \omega',$$

де ω' одержано з ω заміною змінної x на xy. Отримане слово має тип $5 = 5$. Якщо ж друга поява змінної x міститься в слові ω_0, то поділимо рівняння $\omega_0\cdot xy = \omega$ на xy зовні:

$$\omega_0 = \omega\cdot xy.$$

Отримали щойно проаналізований випадок.

З парастрофної нескоротності рівняння типу $3 + 3 = 4$ випливає, що підслово довжини три є триелементним, тому можна вважати, що воно збігається з $xy \cdot z$:

$$\omega_0 \cdot (xy \cdot z) = \omega.$$

Поділимо це рівняння на y через x. Якщо друга поява змінної x міститься в ω, то отримаємо рівняння типу $5 = 5$; якщо x міститься в ω_0, то отримаємо рівняння типу $4 + 2 = 4$, яке щойно розглянули.

Лему доведено.

Отже, далі розглядатимемо лише функційні рівняння типу $5 = 5$, тобто такі, і ліва, і права частина яких є словом довжини 5. Такі слова можна поділити на три типи за довжиною підслів:

$$\text{(a)}\ (2 + 2) + 1, \quad \text{(b)}\ 3 + 2, \quad \text{(c)}\ (3 + 1) + 1. \tag{10}$$

Доведемо, що кожне неврівноважене парастрофно нескоротне функційне рівняння парастрофно рівносильне деякому врівноваженому. Для цього спочатку з'ясуємо, якими можуть бути слова парастрофно нескоротного квадратичного рівняння типу $5 = 5$.

Слово називається *квадратичним*, якщо кожна предметна змінна має в ньому не більше двох появ, тобто якщо воно може бути стороною деякого квадратичного рівняння.

Квадратичне слово ω назвемо парастрофно рівносильним слову v, якщо ω можна отримати з v за скінченну кількість таких кроків: переіменування предметних чи функційних змінних, заміна підслова $v_1 v_2$ підсловом $v_2 v_1$, а також така заміна: якщо xv_1 є підсловом і x має дві появи, то заміна підслова xv_1 на x і заміна іншої появи змінної x словом xv_1.

Якщо $\omega_1 = \omega_2$ і $v_1 = v_2$ є квадратичними рівняннями і слово ω_1 є парастрофно рівносильним v_1, то рівняння $\omega_1 = \omega_2$ і $v_1 = v_2$ також парастрофно рівносильні. Обернене твердження невірне.

Лема 6. *Кожне слово довжини* 5 *неврівноваженого квадратичного парастрофно нескоротного функційного рівняння типу* $5 = 5$:

1) *при повторенні в слові двох змінних є парастрофно рівносильним слову*

$$(xy \cdot xz)y; \tag{11}$$

2) *при повторенні в слові однієї змінної є парастрофно рівносильним одному із слів*

$$\text{(i)}\ (xy \cdot xz)t, \quad \text{(ii)}\ (xy \cdot zt)x, \quad \text{(iii)}\ (xy \cdot z)t \cdot x. \tag{12}$$

Доведення. Розглянемо слово типу $(2 + 2) + 1$. Два підслова довжини два можуть мати не більше однієї спільної змінної, інакше рівняння буде скоротним. Саме тому підслово довжини 4 типу $2 + 2$ має не менше трьох різних змінних. Позаяк предметні змінні в підслові довжини два є різними, то розглядуване слово може бути двох варіантів:

$$(xy \cdot xz)t_1, \qquad (xy \cdot zt)t_2.$$

Якщо в слові повторюються дві змінні, то $t_1 \in \{y, z\}$, а з урахуванням комутування без втрати загальності можна вважати, що метазмінна t_1 збігається з y, тому маємо слово (11). Якщо повторюється лише одна змінна, то, поклавши $t_1 = t$, отримаємо слово (i) із (12).

Знову з урахуванням комутування без втрати загальності можна вважати, що в другому слові метазмінна t_2 збігається із змінною x, тому в цьому випадку маємо слово (ii) із (12).

Розглянемо слово типу $(3 + 1) + 1$. Згідно з лемою 3 підслова довжини три складаються з трьох різних предметних змінних, які позначимо через x, y, z. Отже, кожне слово зазначеного типу матиме вигляд

$$(xy \cdot z)t_1 \cdot t_2.$$

При повторенні двох змінних отримаємо самодостатню дугу відносно третьої змінної, а це, згідно з лемою 3, суперечить парастрофній нескоротності рівняння. Отже, в такому слові може повторюватися лише одна змінна.

Припустимо, що повторюється змінна t_1. З неіснування самодостатніх дуг випливає, що $t_1 \neq z$, t_2. Не втрачаючи загальності, покладемо $t_1 = x$, тому $t_2 = t$ і маємо слово $(xy \cdot z)x \cdot t$. Поділимо на змінну y через x і переставимо двоелементні підслова, в результаті отримаємо слово (i).

Припустимо, що повторюється змінна t_2, тому t_1 не повторюється, а отже, збігається з t. З леми 3 випливає, що $t_2 \neq t$.

Очевидно, що при $t_2 = x$ та при $t_2 = y$ маємо слово (iii). Якщо ж $t_2 = z$, то отримуємо слово $(xy \cdot z)t \cdot z$. Поділимо на xy через змінну z: $zt \cdot (xy \cdot z)$. Отримане слово поділимо на t через змінну z: $(xy \cdot zt)z$. Переіменувавши змінні і скориставшись комутуванням, отримаємо слово (ii).

І, нарешті, розглянемо слова типу $3 + 2$, тобто слова типу $(xy \cdot z) \cdot t_1 t_2$. Повторення двох змінних означає наявність самодостатньої дуги, тому можливе лише повторення однієї змінної. Отже, одна із змінних дорівнює t. Не втрачаючи загальності, покладемо $t_2 = t$.

Позаяк рівняння не має квадратів, то $t_1 \neq t$, а комутування дозволяє обмежитись лише випадком, коли лише t_1 збігається з однією із змінних x, z. Тому отримаємо такі слова:

$$(xy \cdot z) \cdot xt, \qquad (xy \cdot z) \cdot zt.$$

Поділимо перше слово на t через x, а друге — на m через z. В результаті отримаємо слова (iii) і (ii) відповідно.

Лему 6 доведено.

Лема 7. *Загальне неврівноважене парастрофно нескоротне квадратичне рівняння від п'яти предметних змінних парастрофно рівносильне деякому врівноваженому рівнянню.*

Доведення. Неврівноваженість квадратичного рівняння означає, що обидві появи деякої із предметних змінних знаходяться в одній частині рівняння. Оскільки в лівій та правій частинах рівняння має бути однакова кількість предметних змінних, які повторюються, то розглянемо спочатку випадок, коли в кожній частині рівняння повторюються дві змінні, а потім — коли одна змінна.

Нехай у лівій частині рівняння є дві змінні, обидві появи яких знаходяться в лівій частині. Позначимо ці змінні через x та y. Тоді в правій частині також є дві такі змінні, які позначимо через u, z. З леми 6 випливає, що в лівій і правій частинах знаходяться слова типу (11). Отже, зазначене рівняння буде таким:

$$(xy \cdot xz)y = (ut \cdot uz)t.$$

Поділимо це рівняння на x через z, а потім зовні на t:

$$(xy \cdot z)y \cdot t = ut \cdot (u \cdot xz).$$

Отримане рівняння поділимо на y через x та на u через t:

$$(xz \cdot y) \cdot ut = (xy \cdot z)u \cdot t.$$

Останнє рівняння є врівноваженим.

Розглянемо функційні рівняння, в яких ліва частина містить лише одну предметну змінну з її обома появами. Позначимо таку змінну через x. Згідно з лемою 6 у правій частині рівняння також є лише одна така змінна, яку позначимо через u.

З леми 6 випливає, що ліва частина рівняння збігається з одним із слів (i), (ii) або (iii).

Права ж частина має такий самий тип, тобто правою частиною можуть бути слова

$$\text{(I)}\ \ (ut_1 \cdot ut_2)t_3, \qquad \text{(II)}\ \ (ut_1 \cdot t_2 t_3)u, \qquad \text{(III)}\ \ (ut_1 \cdot t_2)t_3 \cdot u,$$

де t_1, t_2, t_3 є метазмінними, які набувають попарно різних значень у множині предметних змінних $\{y, z, t\}$.

Поділимо це рівняння на x через y. Якщо правою частиною є слово типу (II) або (III), то поділимо це рівняння зовні на u і в результаті отримаємо врівноважене функційне рівняння.

Якщо правою частиною є слово типу (I), то поділимо таке рівняння на u через змінну t_1 чи t_2, яке не збігається із змінною y. В результаті також отримаємо врівноважене функційне рівняння.

Лему 7 доведено.

Отже, для повної класифікації нескоротних квадратичних функційних рівнянь досить розглянути класифікацію парастрофно нескоротних врівноважених рівнянь. Розіб'ємо множину всіх рівнянь на 6 типів у відповідності з типом слів, які є в лівій і правій частинах рівняння. Слова довжини п'ять за довжиною підслів можуть бути лише трьох типів: a, b, c (див. (10)). Комбінуючи ці типи, отримуємо 6 типів функційних рівнянь: (aa), (ab), (ac), (bb), (bc), (cc). Спочатку покажемо, що всі ці рівняння парастрофно рівносильні рівнянням типів (aa) або (ab).

Лема 8. *Будь-яке рівняння типу* (cc) *парастрофно рівносильне рівнянню одного з інших типів.*

Доведення. Довільне рівняння типу (cc) парастрофно рівносильне рівнянню виду

$$(xy \cdot z)t \cdot u \;=\; (t_1 t_2 \cdot t_3)t_4 \cdot t_5, \tag{13}$$

де $t_1 < t_2$ та в правій частині x знаходиться лівіше за y.

Проаналізуємо це рівняння за розташуванням змінної y. Маємо $t_1 \neq y$, оскільки змінна x знаходиться лівіше за змінну y. Також неможливим є випадок $t_2 = y$, бо тоді з нерівності $t_1 < t_2$ випливатиме, що $t_1 = x$, і рівняння матиме два підслова xy, що суперечить нескоротності рівняння.

Припустимо, що в (13) $t_3 = y$, тоді, враховуючи, що x знаходиться лівіше за y і $t_1 < t_2$, маємо $t_1 = x$, а з леми 3 випливає, що $t_2 \neq z$:

$$(xy \cdot z)t \cdot u \;=\; (xt_2 \cdot y)t_4 \cdot t_5.$$

Поділимо це рівняння на x через y і на x через t_2. В результаті отримаємо врівноважене рівняння, ліва частина якого буде збігатися з $(yz \cdot xt)u$ або з $(yz \cdot t) \cdot xu$ і тому не буде словом типу (c).

Нехай в (13) виконується $t_4 = y$, тобто маємо рівняння

$$(xy \cdot z)t \cdot u \;=\; (t_1 t_2 \cdot t_3)y \cdot t_5.$$

Оскільки $t_1 < t_2$, для змінної x можливі два випадки: $t_1 = x$ або $t_3 = x$. Якщо $t_1 = x$, то поділимо на x через t_2 і через y, тоді у правій частині матимемо слово $(t_2 t_3 \cdot xy)t_5$ типу (a).

Якщо $t_3 = x$, то слово t_1t_2 збігається з zu або з tu, позаяк $t_5 \neq u$. В цьому випадку поділимо рівняння на u зовні і на u через z, коли $t_1t_2 \leftrightharpoons zu$, і через t, коли $t_1t_2 \leftrightharpoons tu$ (символ $\leftrightharpoons$ позначає графічний збіг слів). В результаті отримаємо врівноважене рівняння, в якому ліва частина є словом типу (a) або (b).

І, нарешті, нехай в рівності (13) $t_5 = y$. Поділимо рівняння на y зовні:

$$((xy \cdot z)t \cdot u)y \;=\; (t_1t_2 \cdot t_3)t_4.$$

Поділимо це рівняння на y через змінну x. Якщо $t_4 = x$, то отримаємо рівняння типу (cb), а якщо $t_3 = x$ — типу (ca). Якщо ж $t_1 = x$, то матимемо рівняння

$$(xz \cdot t)u \cdot y \;=\; (xy \cdot t_2)t_3 \cdot t_4,$$

яке поділимо на x через z та на x через y. Знову отримаємо врівноважене рівняння, в лівій частині якого буде слово $(zt \cdot u) \cdot xy$ не типу (c).

Лема 9. *Кожне рівняння типу* (bc) *парастрофно рівносильне деякому рівнянню одного з типів* (aa), (ac), (ab).

Доведення. Кожне рівняння типу (bc) парастрофно рівносильне рівнянню

$$(xy \cdot z) \cdot tu \;=\; (t_1t_2 \cdot t_3)t_4 \cdot t_5,$$

де

$$x \text{ лівіше за } y, \quad t \text{ лівіше за } u \text{ та } t_1 \prec t_2. \tag{14}$$

Справді, якщо у правій частині змінна x знаходиться правіше за y, то взаємно переіменуємо в рівнянні змінні x та y і в лівій частині отриманого рівняння переставимо змінні x і y в підслові yx.

Звідси випливає, що $t_5 \in \{y, z, u\}$. Розглянемо кожне з цих значень окремо.

Нехай $t_5 = y$. Поділимо на y через x та зовні на y. В результаті отримаємо рівняння, ліва частина якого є словом типу (a). В інших випадках отримаємо одне з таких рівнянь:

(i) $(xy \cdot z) \cdot tu = (xt \cdot u)y \cdot z$, (ii) $(xy \cdot z) \cdot tu = (xt \cdot y)u \cdot z$,

(iii) $(xy \cdot z) \cdot tu = (zt \cdot x)y \cdot u$, (iv) $(xy \cdot z) \cdot tu = (xz \cdot t)y \cdot u$,

(v) $(xy \cdot z) \cdot tu = (xt \cdot y)z \cdot u$, (vi) $(xy \cdot z) \cdot tu = (xt \cdot z)y \cdot u$.

Справді, нехай $t_5 = z$, тоді $t_4 \in \{y, u\}$. У випадку $t_4 = y$ із співвідношень (14) випливає, що $t_2 \neq x$; при $t_2 = u$ маємо $t_1 = t$, і в рівнянні буде два підслова tu, що суперечить лемі 3, тому $t_2 \neq u$. Отже, при $t_4 = y$ маємо $t_2 = t$, а з (14) випливає $t_1 = x$ і $t_3 = u$. Якщо ж $t_4 = u$, то з (14) маємо $t_3 \neq x, t$, тому $t_3 = y$ і $t_1t_2 \leftrightharpoons xt$. Отримаємо рівняння (i) та (ii).

Нехай $t_5 = u$, тоді $t_1 = x$ або $t_3 = x$. Якщо $t_3 = x$, то з (14) випливає, що $t_4 = y$, і тоді $t_1t_2 \leftrightharpoons zt$, тобто отримуємо рівняння (iii). Якщо ж $t_1 = x$, то $t_2 \neq$ $\neq y$, оскільки в лівій частині вже є підслово xy, тому $t_2 \in \{z, t\}$. У випадку, коли $t_2 = z$, із нескоротності рівняння та леми 3 випливає, що $t_3 \neq y$, тому $t_3 = t$ і $t_4 = y$; а якщо $t_2 = t$, то можливі обидва варіанти: $t_3 = y$, $t_4 = z$ і $t_3 =$ $= z$, $t_4 = y$. Тут ми одержали рівняння (iv), (v) та (vi) відповідно.

Отже, для завершення доведення леми залишилось розглянути зазначені вище рівняння (i) – (vi). Поділимо рівняння на предметні змінні: рівняння (i) поділимо на x через змінну t та на x через змінну y; рівняння (ii) — на t через змінну u та на t через змінну x; рівняння (iii) — на t через змінну z та на t через змінну u; рівняння (iv) — на x через змінну y та на x через змінну z; рівняння (vi) — на x через змінну y та на x через змінну t. В результаті отримаємо врівноважені рівняння, одна із сторін яких є підсловом типу (a), а тому для цих випадків лему доведено.

Залишилось розглянути рівняння (v), яке поділимо на t через змінну x та на t через змінну u:

$$(xt\cdot y)z\cdot u = (xy\cdot z)\cdot tu.$$

Отримане рівняння поділимо на x через y і на x через t:

$$(xy\cdot t)z\cdot u = yz\cdot(xt\cdot u).$$

Останнє рівняння поділимо на y через x і на y через z, після чого отримаємо врівноважене рівняння типу (ac).

Лему 9 доведено.

Лема 10. *Кожне рівняння типу* (bb) *парастрофно рівносильне деякому рівнянню одного з типів* (aa), (ac), (ab).

Доведення. Кожне рівняння типу (bb) парастрофно рівносильне рівнянню

$$(xy\cdot z)\cdot tu = (t_1t_2\cdot t_3)\cdot t_4t_5,$$

де в правій частині справджуються такі умови:

$$x \text{ лівіше за } y, \quad t \text{ лівіше за } u, \quad t_1 < t_2, \quad t_4 < t_5. \tag{15}$$

Покажемо, що в цьому випадку отримаємо одне з таких рівнянь:

(i) $(xy\cdot z)\cdot tu = (xt\cdot u)\cdot yz$, (ii) $(xy\cdot z)\cdot tu = (xt\cdot y)\cdot zu$,

(iii) $(xy\cdot z)\cdot tu = (xz\cdot t)\cdot yu$, (iv) $(xy\cdot z)\cdot tu = (xt\cdot z)\cdot yu$,

(v) $(xy\cdot z)\cdot tu = (zt\cdot x)\cdot yu$.

З умов (15) одразу випливає, що $t_5 \notin \{x, t\}$. Якщо $t_4 = x$, то $t_5 = y$, і таке рівняння буде скоротним, бо в лівій частині вже є підслово xy. Так само неможливим є випадок $t_4 = t$, тому $t_4 \notin \{x, t\}$. Оскільки $t_4 < t_5$, то можливі лише три випадки: $t_4t_5 \in \{yz, zu, yu\}$.

Нехай $t_4t_5 \leftrightharpoons yz$. При $t_3 = x$ маємо $t_1t_2 \leftrightharpoons tu$, що неможливо, бо в лівій частині є підслово tu. Позаяк t має бути лівіше за u в правій частині, то $t_1 = x$, $t_2 = t$, $t_3 = u$, і ми маємо рівняння (i).

Нехай $t_4t_5 \leftrightharpoons zu$. Якщо $t_3 = t$, то $t_1t_2 \leftrightharpoons xy$, що неможливо, тому $t_3 \neq t$ і позаяк в правій частині x лівіше за y, то $t_3 = y$. Тоді $t_1t_2 \leftrightharpoons xt$, тобто отримаємо рівняння (ii).

Нехай тепер $t_4t_5 \leftrightharpoons yu$. Оскільки $t_1 < t_2$, для слова t_1t_2 можливі також три випадки: $t_1t_2 \in \{xz, xt, zt\}$. Якщо $t_1t_2 \leftrightharpoons xz$, то $t_3 = t$, а якщо $t_1t_2 \leftrightharpoons xt$, то $t_3 = z$. І нарешті, коли $t_1t_2 \leftrightharpoons zt$, то $t_3 = x$. У цьому випадку матимемо рівняння (iii), (iv) та (v) відповідно.

Таким чином, для доведення теореми залишилось розглянути і проаналізувати рівняння (i) – (v). Поділивши рівняння (v) на t через змінні u та z, отримаємо рівняння, ліва частина якого є словом типу (a), тому в цьому випадку лему доведено.

Поділимо рівняння (i) і (ii) на t через змінні x і u, а кожне з рівнянь (iii) і (iv) на y також через змінні x та u. В результаті отримаємо такі рівняння:

$$(xt\cdot y)z\cdot u = (x\cdot tu)\cdot yz, \qquad (xt\cdot y)z\cdot u = xy\cdot(z\cdot tu),$$

$$xz\cdot(t\cdot yu) = (xy\cdot z)t\cdot u, \qquad xz\cdot(t\cdot yu) = (xy\cdot t)z\cdot u.$$

Поділимо ці рівняння зовні на u та на u через змінні t і y відповідно. В результаті отримаємо врівноважені рівняння, в яких одна із частин є словом типу (a).

Лему 10 доведено.

Лема 11. *Будь-яке рівняння типу* (ac) *парастрофно рівносильне рівнянню типу* (ab).

Доведення. Кожне рівняння типу (ac) парастрофно рівносильне рівнянню

$$(xy\cdot zt)u = (t_1t_2\cdot t_3)t_4\cdot t_5,$$

де в правій частині

$$x \text{ лівіше за } y, \quad x \text{ лівіше за } z, \quad z \text{ лівіше за } t, \quad t_1 \prec t_2. \tag{16}$$

Покажемо, що цим умовам задовольняють шість рівнянь:

$$\text{(i)}\ (xy\cdot zt)u = (xz\cdot t)u\cdot y, \qquad \text{(ii)}\ (xy\cdot zt)u = (xz\cdot u)t\cdot y,$$

$$\text{(iii)}\ (xy\cdot zt)u = (xz\cdot y)u\cdot t, \qquad \text{(iv)}\ (xy\cdot zt)u = (xu\cdot z)t\cdot y,$$

$$\text{(v)}\ (xy\cdot zt)u = (xu\cdot y)z\cdot t, \qquad \text{(vi)}\ (xy\cdot zt)u = (xu\cdot z)y\cdot t.$$

З умов (16) випливає, що $t \notin \{t_1, t_2\}$, бо ця змінна стоїть принаймні на дві зміні правіше від початку слова. Саме тому $t_1 \neq y$. До того ж $t_2 \neq y$, бо інакше $t_1 = x$, а слово xy вже є в лівій частині. Отже, метазмінні t_1, t_2 набувають значень у множині $\{x, z, u\}$. Випишемо множину значень слова t_1t_2, взявши до уваги нерівність $t_1 \prec t_2$ і те, що змінна z не може стояти на першому місці, тобто $t_1 \neq z$. Таких слів лише два: xz та xu.

З умов (16) випливає, що $t_5 \neq x, z$, а з леми 3 маємо $t_5 \neq u$, тому $t_5 \in \{y, t\}$.

Припустимо, що $t_1t_2 \leftrightharpoons xz$. У випадку $t_5 = y$ для інших змінних обидва значення є можливими: $t_3 = t$, $t_4 = u$ та $t_3 = u$, $t_4 = t$, тому ми матимемо рівняння (i) та (ii) відповідно. Якщо $t_5 = t$, то $t_4 = u$, і тому $t_3 = y$. У цьому випадку отримаємо рівняння (iii).

Нехай $t_1t_2 \leftrightharpoons xu$. У випадку $t_5 = y$ із залежностей (16) випливає $t_3 = z$, $t_4 = t$, і ми маємо рівняння (iv). Якщо ж $t_5 = t$, то для інших змінних обидва значення є можливими: $t_3 = y$, $t_4 = z$ та $t_3 = z$, $t_4 = y$, тобто ми одержали два рівняння: (v) та (vi).

Таким чином, для доведення теореми залишилось розглянути функційні рівняння (i) – (vi). Кожне з рівнянь (i) – (iii) поділимо на підслово $xy\cdot zt$ через змінну u. А результуючі рівняння поділимо зовні: рівняння (i) — на y і на $xz\cdot t$; рівняння (ii) — на y, на t і на xz; а рівняння (iii) — на t і на $xz\cdot y$. Всі отримані рівняння матимуть тип (ab).

Кожне з рівнянь (iv), (v), (vi) поділимо на підслово довжини три: рівняння (iv) — на підслово $xu\cdot z$ через змінну t; рівняння (v) — на підслово $xu\cdot y$ через змінну z; рівняння (vi) — на підслово $xu\cdot z$ через змінну y. Кожне з отриманих рівнянь поділимо на u та зовні: на xy, на xy і на zt відповідно:

$$z\cdot(xu\cdot z)t = (yt\cdot u)\cdot xy, \qquad t\cdot(xu\cdot y)z = (zt\cdot u)\cdot xy,$$

$$x\cdot(xu\cdot z)y = (yt\cdot u)\cdot zt.$$

Перше рівняння поділимо на змінну y через змінну t та зовні на z; друге рівняння — на змінну t через змінну z і зовні на t; третє рівняння — на змінну t через змінну y та зовні на x. В результаті в кожному із випадків отримаємо рівняння типу (ab).

Лему 11 доведено.

Лема 12. *Довільне рівняння типу* (ab) *парастрофно рівносильне одному з рівнянь* (6), (7) *і* (8).

Доведення. Кожне рівняння типу (ab) парастрофно рівносильне рівнянню

$$(xy\cdot zt)u = (t_1t_2\cdot t_3)\cdot t_4t_5,$$

де в правій частині справджуються такі умови:

$$x \text{ лівіше за } y, \quad x \text{ лівіше за } z, \quad z \text{ лівіше за } t, \qquad t_1 \prec t_2, \quad t_4 \prec t_5. \qquad (17)$$

Оскільки u є найбільшою змінною, то з (17) випливає, що $t_1 \neq y, z, t, u$, тому $t_1 = x$. Знову із (17) маємо $t_2 \neq t$, а з леми 3 отримуємо $t_2 \neq y$, тому $t_2 = z$ або $t_2 = u$.

Якщо $t_2 = z$, то з урахуванням (17) маємо $t_4t_5 \in \{yt, yu, tu\}$. Якщо $t_4t_5 \leftrightharpoons yt$, то отримуємо рівняння (6). Якщо $t_4t_5 \leftrightharpoons yu$, то маємо рівняння (8). Якщо ж $t_4t_5 \leftrightharpoons tu$, то одержуємо рівняння

$$(xy\cdot zt)u = (xz\cdot y)\cdot tu.$$

Взаємно переіменуємо змінні x і z, а також y і t:

$$(zt\cdot xy)u = (zx\cdot t)\cdot yu.$$

Застосувавши комутування, отримаємо рівняння (8).

Якщо $t_2 = u$, то $t_4t_5 \in \{yz, yt, zt\}$. При $t_4t_5 \leftrightharpoons zt$ маємо в рівнянні два однакових підслова, а це суперечить лемі 3. Якщо $t_4t_5 \leftrightharpoons yt$, то отримуємо (7). Якщо ж $t_4t_5 \leftrightharpoons yz$, то маємо рівняння

$$(xy\cdot zt)u = (xu\cdot t)\cdot yz.$$

Поділимо дане рівняння на u зовні та на u через змінну x:

$$(xu\cdot y)\cdot zt = (xt\cdot yz)u.$$

Переіменувавши змінні згідно з циклом (tyz), отримаємо рівняння (7).

Лему 12 доведено.

Лема 13. *Довільне рівняння типу* (aa) *парастрофно рівносильне рівнянню* (9).

Доведення. Кожне рівняння типу (aa) парастрофно рівносильне рівнянню

$$(xy\cdot zt)u = (t_1t_2\cdot t_3t_4)t_5,$$

де в правій частині справджуються такі умови:

$$x \text{ лівіше за } y, \quad x \text{ лівіше за } z, \quad z \text{ лівіше за } t, \qquad t_1 \prec t_2, \quad t_1 \prec t_3 \prec t_4. \qquad (18)$$

Із залежностей (18) випливає, що $t_5 \neq x, z$, а з леми 3 одразу випливає, що $t_5 \neq$ $\neq y$. Отже, $t_5 \in \{y, t\}$. З нерівностей (18) випливає, що $x \notin \{t_2, t_3, t_4\}$, отже, $t_1 = x$.

Нехай $t_5 = t$. З леми 3 випливає, що $t_2 \neq y$, тому $t_2 \in \{z, u\}$. Якщо $t_2 = z$, то $t_4 t_5 \leftrightharpoons yu$, і рівняння збігається з (9).

Якщо ж $t_2 = u$, то $t_4 t_5 \leftrightharpoons yz$, і рівняння має вигляд

$$(xy \cdot zt)u = (xu \cdot yz)t. \tag{19}$$

Взаємно переіменуємо змінні x та y і скористаємось комутуванням, в результаті також отримаємо рівняння (9).

Нехай $t_5 = y$. Одразу зауважимо, що з (18) випливає, що $t_2 \neq x, y, t$. У випадку $t_2 = u$ маємо слово $t_4 t_5 \leftrightharpoons z\,t$, яке вже є в лівій частині, а це суперечить лемі 3. Отже, $t_2 = z$, тому $t_4 t_5 \leftrightharpoons tu$, і рівняння матиме вигляд

$$(xy \cdot zt)u = (xz \cdot tu)y.$$

Переіменуємо змінні так, щоб права частина була в порядку лексикографічного зростання, тоді ліва частина збігатиметься з правою частиною рівняння (19).

Лему доведено.

Наслідком з доведених лем є теорема 2.

Автор висловлює щиру вдячність Ф. М. Сохацькому, під керівництвом якого виконано дану роботу.

1. *Сохацький Ф. М.* Класифікація функційних рівнянь на квазігрупах // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 9. – С. 1259 – 1266.

Одержано 12.05.2004,
після доопрацювання — 06.06.2005