УДК 512.548.74

Коваль Р. Ф.,
канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри біофізики, інформатики та медичної апаратури Вінницького національного медичного університету ім. М. І. Пирогова, м. Вінниця, Україна

КІЛЬКІСТЬ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА КВАЗІГРУПАХ

У статті продовжується вивчення функціональних рівнянь на квазігрупових операціях. Функціональне рівняння $\omega = \upsilon$ називається загальним, якщо воно є рівністю двох безповторних слів, які мають однакові предметні змінні; врівноваженим, якщо кожна предметна змінна має точно по одній появі в лівій і правій частинах рівняння; квадратичним, якщо кожна предметна змінна має в рівнянні точно дві появи; скоротним, якщо воно має самодостатню послідовність підслів; парастрофно скоротним, якщо воно парастрофно рівносильне деякому скоротному рівнянню. Отримано формулу для підрахунку кількості функціональних рівнянь довжини m.

Ключові слова: *квазігрупові операції; квазігрупа; функціональне рівняння; квадратичне функціональне рівняння; парастрофна рівносильність.*

Вступ. У галузі прикладної математики і чисельних методів часто виникають задачі, пов'язані з квазігрупами та квазігруповими операціями. Одним із підходів до вивчення квазігруп є функціональний підхід. Вивчення функціональних рівнянь на квазігрупах є важливою частиною сучасної прикладної математики. Поштовхом до вивчення функціональних рівнянь на бінарних квазігрупах (тобто в класі певних функцій від двох змінних) можна вважати роботи німецького математика Шауффлера, який у роки Другої світової війни під час роботи в криптографічному відділі німецької армії помітив, що стійкість криптограм підвищується, якщо при їх побудові використовувати системи квазігруп. Загальна теорія функціональних рівнянь на квазігрупах розвивається досить потужно. В цьому напрямку можна виокремити роботи В. Д. Білоусова, А. Крапєжа, Ф. М. Сохацького, В. Дудека, А. Табарова, Б. Алімпіч, А. А. Гварамії, С. Крстіча, Ю. М. Мовсисяна, Я. Дуплака та інших.

Основними класами квазігруп, які розглядаються, є многовиди, тобто класи квазігруп, що визначаються тотожностями. Ефективним методом аналізу тотожностей є розв'язання відповідного функціонального рівняння, тобто рівняння, яке отримуємо з даної тотожності заміною кожної появи функційного символу функційною змінною відповідної арності. В багатьох роботах не розрізняються поняття функціонального рівняння і поняття загальної тотожності, проте відмінність між цими поняттями існує. Вивчення функціональних рівнянь над квазігрупами можна розглядати як синтезоване вивчення множин тотожностей у квазігрупах.

У теорії функціональних рівнянь на квазігрупах традиційно вивчались два питання: знаходження методів розв'язку функціональних рівнянь та знаходження застосувань результатів розв'язування функціональних рівнянь до аналізу тотожностей на квазігрупах. Проте знання методу розв'язування рівнянь не завжди забезпечує можливість та ефективність застосування отриманих результатів. Тому постає проблема системного вивчення функціональних рівнянь на квазігрупах.

Функціональні рівняння мають ту особливість, що їх кількість швидко зростає із ростом числа предметних та функціональних змінних. Тому важливими виявилися питання введення парастрофної еквівалентності на множині функціональних рівнянь на квазігрупах і класифікації функціональних рівнянь за допомогою парастрофної еквівалентності. Крім того, досі залишається відкритим питання повної класифікації функціональних рівнянь від довільної кількості предметних та функціональних змінних.

Аналіз досліджень і публікацій. Вивчення функційних рівнянь в алгебрі все більше привертає увагу математиків, що викликано ефективністю їх використання.

Перший вагомий результат у дослідженні квадратичних функційних рівнянь отримав В. Д. Білоусов, який знайшов множину всіх розв'язків загального функційного рівняння асоціативності [1]. Ця теорема спричинила серію статей, де встановлюються достатні умови розташування предметних змінних в тотожності, для ізотопності квазігрупи, в якій вони виконуються, деякій групі [2]. В [3] В. Д. Білоусов відзначив, що загальні тотожності та функційні рівняння доцільно розглядати з точністю до парастрофної рівносильності. Використовуючи цей підхід, він дав повну класифікацію тотожностей малої довжини на квазігрупах.

Вперше формальне означення поняття парастрофної рівносильності функційних рівнянь дано Ф. М. Сохацьким [4; 5], хоча раніше це поняття використовувалось В. Д. Білоусовим як для функційних рівнянь, так і для тотожностей [3]. А. Крапеж [6; 7] зводить задачу класифікації функціональних рівнянь до проблеми класифікації кубічних графів. Крім того, у своїх працях А. Крапєж наводить формули для підрахунку кількості квадратичних функціональних рівнянь із заданою кількістю змінних.

У [4] розпочато вивчення функційних рівнянь із точністю до парастрофної рівносильності і доведено, що з точністю до парастрофної рівносильності загальних квадратичних парастрофно нескоротних рівнянь від трьох предметних змінних існує одне рівняння – загальне рівняння асоціативності, а від чотирьох предметних змінних – два рівняння: загальне рівняння медіальності та загальне рівняння псевдомедіальності. У статтях автора [8; 9; 10; 11; 12] розпочато вивчення загальних квадратичних парастрофно нескоротних функційних рівнянь від п'яти предметних змінних на квазігрупах і доведено, що кожне таке рівняння є парастрофно рівносильним принаймні до одного з чотирьох наведених рівнянь показано існування функційних рівнянь, які не є квадратичними і врівноваженими, але серед компонентів розв'язку обов'язково мають ізотопи груп та знайдено розв'язки вказаного рівняння; знайдено інваріанти парастрофної еквівалентності та показано ефективність застосування цих інваріантів для доведення парастрофної нерівносильності функційних рівнянь; завершено класифікацію всіх загальних квадратичних функціональних рівнянь від n ($n = 2, 3, 4$) загальних квадратичних рівнянь від n (n=2, 3, 4) предметних змінних з точністю до парастрофної рівносильності, виділено представники кожного із класів і знайдено множини розв'язків рівнянь від n ($n = 2, 3$) змінних.

Операція g називається *квазігруповою*, якщо кожне з рівнянь:

$$g(x;a)=b,\ \ g(a;y)=b \quad (1)$$

має єдиний розв'язок для всіх $a,b\in Q$. Очевидно, що з кожною квазігруповою операцією g на множині Q визначені операції *лівого* g^l та *правого* g^r ділення, які співставляють кожній парі $(a;b)$ розв'язок першого та другого рівняння із (1) відповідно. Операції $g, g^l, g^r, g^*, g^{l*}, g^{r*}$, де $g^*(x;y):=g(y;x)$, є всіма парастрофами g^σ операції g, які визначаються співвідношеннями:

$$g^{\sigma}(x_{\sigma 1};x_{\sigma 2})=x_{\sigma 3}\leftrightarrow g(x_1;x_2)=x_3\,.$$

Вивчення функційних рівнянь і тотожностей є досить близькими: вибірка квазігрупових операцій задовольняє тотожність тоді і тільки тоді, коли ця вибірка є розв'язком відповідного функційного рівняння, яке отримуємо з даної тотожності заміною символів операцій функційними змінними. Тому вивчення функційних рівнянь над квазігрупами можна розглядати як синтезоване вивчення сукупностей тотожностей у квазігрупах. Тривалий час функційні рівняння в алгебрі розглядалися не як загальна теорія, а вивчались розв'язки кожного окремо взятого функційного рівняння, яке поставало з тих чи інших досліджень.

В. Д. Білоусов був першим, хто розпочав дослідження функційних рівнянь над квазігрупами. В 1958 році він анонсував результат, який пізніше став відомий як «теорема про чотири квазігрупи». Повне його доведення опубліковано двома роками пізніше в статті Я. Ацеля, В. Д. Білоусова і М. Хоссу. Можна сказати, що перші ознаки зародження функційних рівнянь як теорії було в статтях, в яких розглядалось не одне окремо взяте рівняння, а цілі класи функційних рівнянь, які пов'язані між собою певною ознакою. Однією з перших праць цього напрямку була праця А. Сада (1959), який виділив клас врівноважених функційних рівнянь і заявив про розв'язання довільного врівноваженого функційного рівняння на квазігрупах.

В. Д. Білоусов показав, що результат А. Сада правильний лише для рівнянь, названих ним рівняннями першого роду, у яких порядок розташування предметних змінних у лівій і правій частині рівняння однаковий.

Наступним класом функційних рівнянь, які системно досліджуються, став клас квадратичних функційних рівнянь, які в 1981 році А. Крапєж визначив як рівняння, що мають точно дві появи кожної предметної змінної.

С. Крстіч в 1985 році у своїй дисертації навів вдалий загальний метод розв'язування квадратичних рівнянь за допомогою теорії графів, і застосував цей метод до доведення того факту, що довільний многовид квазігруп, який визначений лише квадратичними рівняннями і замкнений відносно ізотопії, є або многовидом квазігруп, або многовидом ізотопів булевих (абелевих, всіх) груп. С. Крстіч дав також необхідні і достатні умови для квадратичних тотожностей, щоб відповідне рівняння мало властивість ізотопності групі.

Нехай $X:=\{x_0,x_1,x_2,...\}$ є множиною предметних змінних, тобто змінних, які набувають значень у довільно вибраній фіксованій множині є множиною предметних змінних, тобто змінних, які набувають значень в довільно вибраній фіксованій множині Q; $F:=\{f_0,f_1,f_2,...\}$ є множиною бінарних функційних змінних, які набувають значень у множині бінарних квазігрупових операцій множини Q. *Слово* над алфавітами F и X визначається таким індуктивним означенням:

– кожну предметну змінну називатимемо словом;
– якщо ω_1 і ω_2 слова і $F_i\in F$, то $F_i(\omega_1,\omega_2)$ є словом;
– інших слів немає.

Нехай ω,υ – довільні слова мови другого порядку, які містять тільки предметні і функціональні змінні. Під *функціональним рівнянням* ми розумітимемо рівність двох слів $\omega=\upsilon$ разом із кванторами загальності за кожною предметною змінною. Функційне рівняння називають:

– *загальним,* якщо воно є рівністю двох безповторних слів, які мають однакові предметні змінні;
– *врівноваженим*, якщо кожна предметна змінна має точно по одній появі в лівій і правій частинах рівняння;
– *квадратичним*, якщо кожна предметна змінна має в рівнянні точно дві появи; *скоротним*, якщо воно має самодостатню послідовність підслів;
– *парастрофно скоротним*, якщо воно парастрофно рівносильне деякому скоротному рівнянню.

Цілі статті. Дослідження, які було проведено, показали, що з метою ілюстрації доцільності і ефективності вивчення класифікації функціональних рівнянь з точністю до парастрофної рівносильності, покажемо, скільки взагалі існує функціональних рівнянь (не обов'язково квадратичних) довжини m, які містять s предметних та функціональних змінних (тобто, яка нижня межа кількості цих рівнянь).

Виклад основного матеріалу.

Теорема. Кількість функціональних рівнянь довжини m, які містять s предметних та p функціональних змінних, причому i-та предметна та j-та функціональна змінна мають m_i та n_j появ, обчислюється за формулою:

$$\frac{(m!)^2}{m}\cdot\frac{1}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_p!\cdot m_1!\cdot m_2!\ldots\cdot m_s!}\cdot\sum_{k=1}^{m-1}(k-1)!\cdot(m-k-1)! \qquad (2)$$

Доведення. Зрозуміло, що в таких рівняннях $m-1$ функціональна змінна. Кожне таке рівняння однозначно визначається значенням трьох незалежних між собою параметрів: розташуванням дужок, послідовністю предметних змінних та послідовністю функційних змінних. Кількість слів, які мають одну й ту ж послідовність функційних змінних та одну і ту ж послідовність предметних змінних довжини p, тобто кількість розташувань дужок, дорівнює $(p–1)!$

Спочатку з'ясуємо кількість зазначених в умові теореми функційних рівнянь довільного фіксованого типу $k = m–k$, тобто рівняння, в якому в лівій частині k змінних, а тому в правій частині $m–k$ змінних. Кількість таких рівнянь при фіксованих послідовностях предметних і функційних змінних дорівнює:

$$(k-1)!\cdot(m-k-1)!$$

Послідовності предметних і функційних змінних – це послідовності з повтореннями, тому їх кількість відповідно дорівнює:

$$\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_s)!}{m_1!\cdot m_2!\cdot\ldots\cdot m_s!},\quad \frac{(n_1+n_2+\ldots+n_p)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_p!}.$$

Але $m_1+m_2+\ldots+m_s=m$, $n_1+n_2+\ldots+n_p=m-1$

, тому кількість зазначених в умові теореми функцій-них рівнянь типу $k = m–k$ дорівнює:

$$\frac{(m!)^2\cdot(k-1)!(m-k-1)!}{m\cdot n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_p!\cdot m_1!\cdot m_2!\ldots\cdot m_s!}.$$

Кожен тип визначається числом k, тому для обчислення кількості рівнянь всіх типів слід просумувати за параметром k і, як результат, одержуємо формулу (2).

Теорему доведено.

Наслідок 1. Кількість функціональних рівнянь довжини m обчислюється за формулою:

$$\frac{(m!)^2}{m}\cdot\sum\frac{1}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_p!\cdot m_1!\cdot m_2!\ldots\cdot m_s!}\cdot\sum_{k=1}^{m-1}(k-1)!\cdot(m-k-1)!, \qquad (3)$$

де другий співмножник є сумою за всіма наборами чисел $n_1,n_2,\ldots,n_p$ і наборами $m_1,m_2,\ldots,m_s$, таких, що $m_1+m_2+\ldots+m_s=m$, $n_1+n_2+\ldots+n_p+1=m.$

Наслідок 2. Кількість загальних функціональних рівнянь довжини m обчислюється за формулою:

$$\left(\sum_{m_1+m_2+\ldots+m_s=m}\frac{m!}{m_1!\cdot m_2!\ldots\cdot m_s!}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{m-1}(k-1)!\cdot(m-k-1)!\right), \qquad (4)$$

Доведення. Позаяк рівняння загальне, то $n_1=n_2=\ldots=n_p=1$, а з рівності $n_1+n_2+\ldots+n_p=m-1$ слідує, що $p=m-1$. Оскільки всі функційні змінні є попарно різними, то, при підрахунку, їх позначення до уваги не беремо. Отже, формулу (3) поділимо на $(m-1)!$ і отримуємо (4).

Наслідок доведено.

Останнім часом з'явилось багато праць, присвячених вивченню квадратичних функційних рівнянь, тобто рівнянь, у яких кожна предметна змінна має точно дві появи. Отже, в даних позначеннях

$$m_1=m_2=\ldots=m_s=2,$$

А довжина такого рівняння дорівнює $2s$. Тому з теореми 1 та наслідку 1 одержуємо такий результат.

Наслідок 3. Кількість загальних квадратичних функціональних рівнянь від s предметних змінних обчислюється за формулою:

$$k_s:=\frac{(2s)!}{2^s}\cdot\sum_{k=1}^{2s-1}(k-1)!\cdot(2s-k-1)!. \qquad (5)$$

Легко довести, що при $n>5$ виконується нерівність:

$$\sum_{k=1}^{n}k!\cdot(n-k)!\geq(n+1)\cdot e^n. \qquad (6)$$

Враховуючи цю нерівність, для загальних квадратичних функційних рівнянь, таких що $k-1+2s-k-1>5$, тобто $s>3$, отримуємо нижню оцінку кількості рівнянь, а саме, має місце таке твердження.

Наслідок 4. Кількість загальних квадратичних функційних рівнянь від $s>3$ предметних змінних перевищує число $(2s)!e^{s-2}(2s-1)$.

Доведення. З наслідку 3 та нерівності (6) послідовно одержуємо, что вказана кількість загальних квадратичних функційних рівнянь від $s>3$ предметних змінних:

$$k_s = \frac{(2s)!}{2^s} \cdot \sum_{k=1}^{2s-1} (k-1)! \cdot (2s-k-1)! > \frac{(2s)!}{2^s} \cdot (2s-1) \cdot e^{2s-2} =$$

$$= \frac{(2s)!}{2^s} \cdot (2s-1) \cdot e^s \cdot e^{s-2} > \frac{(2s)!}{2^s} \cdot (2s-1) \cdot 2^s \cdot e^{s-2} = (2s)! \cdot e^{s-2} \cdot (2s-1),$$

тобто, $k_s > (2s)! \cdot e^{s-2} \cdot (2s-1)$, що і треба було довести.

Наслідок 5. Кількість загальних квадратичних функційних рівнянь від $s \geq 5$ предметних змінних перевищує число e^{3s}

Доведення. Якщо $s \geq 5$, то $2s-1 \geq 9 > e^2$. Крім того, $(2s)! > e^{2s}$ при $s \geq 5$, тому маємо:

$$(2s)! \cdot e^{s-2} \cdot (2s-1) > e^{2s} \cdot e^{s-2} \cdot e^2 = e^{3s}.$$

Наслідок доведено.

Точна кількість рівнянь із точністю до парастрофної рівносильності невідома, проте верхню межу можна значно знизити. По-перше, при обчисленні загальної кількості функційних рівнянь вважалося, що рівняння $\omega = \upsilon$ и $\upsilon = \omega$ є різними. Ототожнивши ці рівняння, ми отримаємо кількість вдвічі меншу, тобто $\frac{1}{2} k_s$. Далі, ототожнимо функційні рівняння, які можна отримати одне з іншого взаємним перейменуванням предметних змінних. Отже, кількість таких рівнянь буде $\frac{1}{2s!} k_s$. Зовнішнім діленням на підслова, кожне рівняння виду $\omega = \upsilon$ можна звести до рівняння виду $x = \omega'$, тобто всі типи рівнянь парастрофно рівносильні до рівняння типу 1 = 2s–1 (в лівій частині рівняння тільки одна змінна x, а в правій частині рівняння буде точно 2s–1 змінних). Отже, розглядуваних рівнянь буде складати:

$$\frac{(2s)!}{2^s \cdot 2 \cdot s!} \cdot (2s-2)! = \frac{(2s)! \cdot (2s-2)!}{2^{s+1} \cdot s!}.$$

У рівнянні $x = \omega'$ слово виду $F_i(\omega_1;\omega_2)$ замінимо підсловом $F_j^*(\omega_1;\omega_2)$. Таких підслів стільки ж, скільки змінних, тому знову ототожниться 2^{s-1} рівнянь. Враховуючи зазначене вище, одержуємо, що кількість квадратичних функцій них рівнянь буде складати:

$$\frac{(2s)! \cdot (2s-2)!}{2^{s+1} \cdot 2^{2s-1} \cdot s!} = \frac{(2s)! \cdot (2s-2)!}{2^{3s} \cdot s!}$$

Висновки. Проблема повної класифікації функціональних рівнянь від довільної кількості предметних змінних з точністю до парастрофної рівносильності досі залишається відкритою. Повністю класифіковані функціональні рівняння від малої кількості предметних змінних (n = 2, 3, 4, 5) та встановлено критерій існування нетривіальних квазігрупових рівнянь на множині квазігрупових операцій. Отримані в роботі результати дають змогу продовжувати дослідження функціональних рівнянь на квазігрупових операціях та класифікувати їх.

ЛІТЕРАТУРА

1. Белоусов В. Д. N-арные квазигруппы / В. Д. Белоусов. – Кишинев : Штиинца, 1972. – 227 с.
2. Belousov V. D. Balanced identities in quasigroup / V. D. Belousov // Matem. Zbornik.– 1966. – №. 70 (112). – P. 55–97.
3. Belousov V. D. Parastrophic-orthogonal quasigroups / V. D. Belousov // Quasigrops and related systems. – 2005.– Vol. 13, № 1. – P. 25–72.
4. Sokhats'kyi F. M. On the classification of functional equations on quasigroups / F. M. Sokhats'kyi // Ukrainian Math. – 2004. Volume 56, Issue 9. – P. 1259–1266.
5. Sokhats'kyi F. M. On isotopes of groups I, Ukrainian Math. J. / F. M. Sokhats'kyi // 1995. Volume 47, Issue 10, P. 1585–1598.
6. Krapez A. On solving a system of balanced functional equations on quasigroups III / A. Krapz // Publications de l'institut mathematique. – Nouvelle serie. – 1979. T. 26 (40). – P. 145–156.
7. Krapez A., Zivkovic D. Parastrophically equivalent quasigroup equations // Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.). – 2010. – № 87 (101). – P. 39–58.
8. Koval' R. F. A classification of quadratic quasigroup functional equations of small length (Ukrainian) / R. F. Koval' // Vesnik KPU im. M. P. Dragomanova, Fiz.-Mat. 5 (2004).
9. Koval' R. F. Solutions of quadratic functional equations with five object variables on quasigroup operations (Ukrainian) / R. F. Koval' // Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh. 11 (2005), Zbl 1137.39303.
10. Koval' R. F. On a Functional Equation with a Group Isotopy Property / R. F. Koval' // Bulentinul Academiei de ,stiinte a Republicii Moldova.– 2005. – N2. – P. 65–71.
11. Koval' R. F. Classification of quadratic parastrophically uncancellable functional equations for five object variables on quasigroups / R. F. Koval' // Ukrainian Math. J. 57/8 (2005), P. 1249–1261.
12. Koval' R. F. Classification of quadratic functional equations for five object variables on quasigroups / R. F. Koval' // Eastern European Scientific Journal (Mathematik– und Technikwissenschaften): Düsseldorf (Germany) : Auris Verlag, 2014, № 6 – Pp. 310–317.

Коваль Р. Ф., *Винницкий национальный медицинский университет им. М. И. Пирогова, г. Винница, Украина*

КОЛИЧЕСТВО ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КВАЗИГРУППАХ

В данной статье продолжается изучение функциональных уравнений на квазигрупповых операциях. Функциональное уравнение $\omega = \upsilon$ называется общим, если это уравнение является равенством двух безповторных слов, содержащих одинаковые предметные переменные; уравновешенным, если каждая предметная переменная входит точно по одному разу в левую и правую части уравнения; квадратичним, если каждая предметная переменная имеет в уравнении точно два появления; сократимым, если уравнение имеет *самодостаточную последовательность подслов; парастрофно сократимым, если уравнение парастрофно равносильно сократимому уравнению. В работе получена формула для вычисления количества функциональных уравнений длины m.*

Ключевые слова: *квазигрупповые операции; квазигруппа; функциональное уравнение; квадратичное функциональное уравнение; парастрофная равносильность.*

Koval’ R. F., *Vinnytsia Pirogov National Medical University*

THE NUMBER OF FUNCTIONAL EQUATIONS ON QUASIGROUPS

We consider functional equations over quasigroup operations. The functional equation $\omega = \upsilon$ *is called general if the functional variables contained in its record are pair-wise different, balanced if each object variable has exactly one appearance on the left-hand side and on the right-hand side of the equation, quadratic if each object variable has exactly two appearances in the equation.*

Functional equations play a specific role in the quasigroup theory. V. D. Belousov was the first to open the new field. He announced the fact, what will later become known as the Four quasigroup theorem. Strengthened and complitely proved it was published two years later. The theorem received general acceptance and wide application. He was also the first to apply the theorems: if a quasigroup satisfies an uncancellable balanced identity, then it is isotopic to a group.

In the article the author a number of parastrophic equivalence invariants are founded; the full classification of quadratic functional equations containing n individual variables (n=2, 3, 4) up to parastrophic equivalence are given; it is stated that there exist two classes when n=2, four classes when n=3 and 17 classes when n=4. It is proved that every general quadratic functional equation having four individual variables, which has no self-contained subterm, is parastrophic equivalent to exactly one of the five given equations; every quadratic parastrophic irreducible functional equation having five individual variables is parastrophic equivalent to at least one given functional equations. It is stated that there exist at least two classes up to parastrophic equivalence.

The existence of nonquadratic functional equations, every solution of which has a group isotope, has proved.

In this article we give formulas for the number of functional equations on Quasigroups.

Key words: *quasigroup operations; balanced identities; functional equation; quadratic functional equation; parastrophic equivalence; commutative equivalence.*

 Дата надходження статті до редколегії 30.12.2014 р.